

Electromagnetic Analysis of a Spoke-type Permanent Magnet Synchronous Motor Based on the Subdomain Method Considering the Relative Permeability of the Core

Kyung-Hun Shin* and Ki-Bong Jang*

Department of Electrical Engineering, Changwon National University, Changwon 51140, South Korea

Jang-Young Choi

Department of Electrical Engineering, Chungnam National University, Daejeon 34134, South Korea

Chang-Woo Kim

Department of Electrical and Electronics Engineering, Chungnam State University, Cheongyang 33303, South Korea

Jung-Hyung Park and Soyoung Sung

Alternative Fuels and Power System Research Center, Korea Research Institute of Ships and Ocean Engineering, Daejeon 34103, South Korea

(Received 20 October 2024, Received in final form 10 December 2024, Accepted 10 December 2024)

This paper proposes a subdomain method for electromagnetic analysis of a spoke type permanent magnet synchronous motor considering the relative permeability of the core. Based on Maxwell's equations and electromagnetic theory, the governing equations of subdomains are derived, and the general solution in each region is derived using the separation of variables. In particular, the general solution, expressed as a Fourier series in both the circumferential and radial directions, is derived by applying the principle of superposition in the core region. The analytical solution is derived using the boundary conditions in each region, and the solution for electromagnetic analysis is derived using the derived analytical solution and electromagnetic theory. The electromagnetic field analysis such as the no-load and armature reaction flux density according to the variation of the relative permeability of the core is performed. The reliability of the proposed method is verified through comparison with finite element analysis results.

Keywords : analytical approach, electromagnetic analysis, spoke-type permanent magnet, motor, subdomain method, efficiency

서브도메인법을 이용한 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 철심의 비투자율을 고려한 전자장 해석

신경훈* · 장기봉*

국립창원대학교 전기공학과, 창원시 창원대학로 20, 59626

최장영

충남대학교 전기공학과, 대전광역시 대학로 99, 34134

김창우

충남도립대학교 전기전자공학과, 충남 청양군 학사길 55, 33303

박정형 · 성소영

선박해양플랜트연구소 친환경연료추진연구센터, 대전시 유성대로 1312번길 32, 34103

(2024년 10월 20일 받음, 2024년 12월 10일 최종수정본 받음, 2024년 12월 10일 게재확정)

본 논문은 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 철심의 비투자율을 고려한 전자기 해석을 위한 서브도메인 해석 방법을 제안한다. 맥스웰 방정식과 전자기 이론을 기반으로 각 영역의 지배방정식을 도출하고, 변수분리법을 이용하여 각 영역에서의 일반해를 유도한다. 특히, 철심 영역에서 중첩의 원리를 적용하여 원주 방향과 반경 방향으로의 푸리에 급수를 갖는 일반해를 도출한다. 각 영역에서의 경계 조건을 이용하여 해석 해를 유도하고, 도출된 해석해와 전자기 이론을 이용하여 전자기 특성 해석을 위한 해를 도출한다. 철심의 비투자율의 변화에 따른 무부하 및 전기자 반작용 지속밀도와 같은 전자기 해석을 수행한다. 제안된 해석 방법의 신뢰성은 유한요소해석 결과와 비교를 통하여 검증한다.

주제어 : 해석적 방법, 전자기 해석, spoke 타입 영구자석, 전동기, 서브도메인법, 효율

I. 서 론

영구자석 동기전동기의 설계 및 최적화를 위해서는 전자기장을 정확하게 계산하는 것이 필수적이다[1-3]. 영구자석 동기전동기의 전자기 해석 방법은 대표적으로 수치 해석법과 해석적 방법으로 나눌 수 있다[4]. 수치 해석법 중 유한요소법(FEM)은 다양한 기하학적 구조와 비선형 및 비동질 재질을 고려할 수 있으며, 실제 결과와 매우 유사한 결과를 도출할 수 있다는 장점이 있다[5,6]. 반면 해석적 모델은 영구자석 동기전동기의 기하학적 및 물리적 가정을 통하여 전자기장을 해석하는 방법으로, 주로 맥스웰 방정식의 해를 각 영역에서 구하고 경계조건을 적용하여 전자기 특성 해석을 수행한다. 지배방정식으로부터 2차 편미분 방정식을 통해 도출한 푸리에 급수 기반의 해석적 방법은 전자기 해석에 있어 유용한 방법으로 활발히 연구되고 있다[7-10]. 주로 공극, 슬롯, 철심 등의 영역을 서로 다른 영역으로 나누어 전자기장을 예측하며, 특히 공극 등 주기적인 영역에서는 일반적인 푸리에 급수 전개, 비주기적인 영역에서는 노이만 경계 조건을 적용한 푸리에 급수 전개를 적용하여 일반 해를 도출한다.

본 연구에서는 서브도메인법을 이용하여 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 철심 비투자율을 고려한 전자기 특성 해석을 제시한다. 맥스웰 방정식으로부터 지배방정식을 도출하고, 푸리에 급수를 이용하여 일반 해를 나타낸다. 각 영역에서의 경계조건을 적용하여 해석해를 도출한다. 철심 비투자율에 따른 무부하 및 전기자 반작용 자계에 의한 전자기 해석을 수행한다. 본 연구에서 제시된 방법은 전기기기의 설계 및 최적화 과정에서 광범위하게 적용 가능하며 설계 시간과 비용을 효과적으로 절감할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 서브도메인법을 이용한 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 전자기 해석

서브도메인법을 이용한 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 철심 투자율을 고려한 전자기 해석 방법은 복잡한 구조와 비동질 재질을 단순화된 해석 모델로 가정하고, 맥스웰 방정식을 이용하여 각 영역에서의 지배방정식을 도출한다. 2차 편미분 방정식을 이용하여 각 영역의 일반 해를 계산하고, 경계 조건

을 이용하여 해석 해를 도출한다. 전자기 이론을 이용하여 전자기 해석을 위한 해를 유도하여 특성 해석을 수행한다.

1. 해석 모델 및 가정

Fig. 1은 분수 슬롯을 가진 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 구조를 나타내며, 전동기의 해석 영역을 정의한다. 여기서 영역 I은 회전자 샤프트, 영역 II는 회전자 영구자석, 영역 III은 회전자 코어, 영역 IV는 공극, 영역 V는 고정자 슬롯, 영역 VI는 고정자 치, 영역 VII은 고정자 요크를 나타낸다. 이때 최외각 영역은 디리클레 경계 조건을 적용하여 자기벡터포텐셜을 0으로 가정한다[9].

본 논문에서 2차원 해석 모델은 자기 벡터 포텐셜 A_z 을 이용하여 극 좌표계에서 푸리에급수로 전개되며, 다음과 같은 가정을 기반으로 해석 모델을 정의한다[8-10]: 1) 영구자석 동기전동기의 단부 효과는 무시하며, 자기 벡터 포텐셜은 z 축에 대해 독립적이다; 2) 고정자의 슈 구조와 회전자의 브릿지 구조는 고려하지 않는다; 3) 고정자 슬롯/치, 회전자 치 및 영구자석은 방사형 구조를 갖는다; 4) 전류 밀도는 z축 방향으로만 존재한다; 5) 재료의 전도도는 0으로 가정하여 와

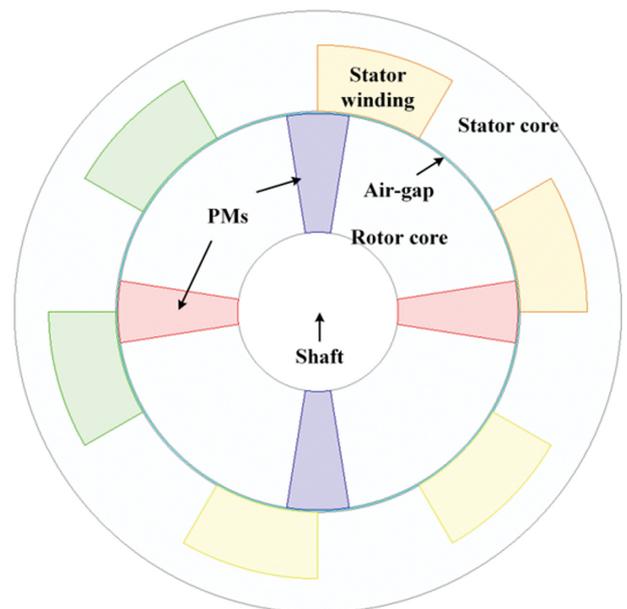


Fig. 1. (Color online) Topology of spoke-type PMSM.

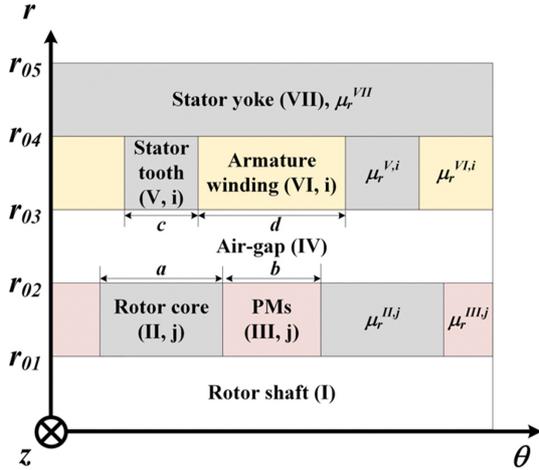


Fig. 2. (Color online) Simplified analytical model for spoke-type PMSM.

전류 효과는 무시한다. 6) 영구자석의 B-H곡선은 선형적으로 가정한다. 7) 영구자석의 자화 방향은 접선 방향이다. 이러한 가정을 바탕으로 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 해석 모델은 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다.

2. 지배방정식: 라플라스 및 푸아송 방정식

Fig. 2에서 해석 영역은 총 7개로 나뉘며, 회전자 샤프트와 공극의 비투자율은 진공의 투자율로, 각 해석 영역의 비투자율은 각각의 비투자율을 갖는다. 맥스웰방정식, 자기벡터포텐셜과 자속밀도의 정의, 자속밀도와 자계의 세기, 자화와의 구성방정식을 적용하면 각 영역에서의 지배방정식은 다음과 같이 도출할 수 있다[11].

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}_0) - \mu_0 \mu_r \mathbf{J} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{A} 는 자기벡터포텐셜, \mathbf{M}_0 는 자화, \mathbf{J} 는 전류밀도를 나타내며, μ_0, μ_r 은 각각 진공의 투자율 및 비투자율이다.

식(1)의 지배방정식에서 좌변은 라플라시안으로 표현되며, 극좌계에서 변수분리법을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{r^2}{R(r)} \left(\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = \lambda \quad (2)$$

여기서, λ 는 고유값을 의미한다.

3. 경계조건의 정의

해석모델의 원주 방향으로의 경계 조건은 연속 조건, 디리클레 경계조건, 노이만 경계조건에 따라서 각 영역에서의 일반해가 정의된다. 원주 방향으로의 연속 조건은 경계가 없이 기계적으로 2π 의 주기를 갖는 영역이며, 회전자 샤프트 (I), 공극 (IV), 고정자 요크(VII)를 의미한다. 여기서 디리클레 경

계조건이 적용되는 영역은 회전자 샤프트(I)와 고정자 요크 (VII)이다. 노이만 경계조건은 원주방향으로 다른 투자율을 갖는 재질이 존재할 때 적용 가능하며, 회전자 코어(II), 회전자 영구자석(III), 고정자 치(V), 고정자 슬롯(VI)이 해당한다. 반경 방향으로의 경계 조건은 자기벡터포텐셜의 연속 조건과 원주 방향으로의 자계의 세기 연속 조건으로부터 도출할 수 있다[12,13].

4. 서브도메인에서의 일반해 도출

회전자 샤프트(I) 영역에서는 라플라스 방정식과 원주방향으로의 연속 조건, 디리클레 정리를 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\mathbf{A}_z^I = \sum_{n=1} \left(B_n^I \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \right) \cos(n\theta) + \left(D_n^I \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \right) \sin(n\theta) \mathbf{i}_z \quad (3)$$

여기서, B_n, D_n 은 각각 미정계수를 나타내며, n 은 푸리에 급수의 고조파를 나타낸다.

회전자 코어(II) 영역에서는 라플라스 방정식과 원주방향으로의 노이만 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_z^{II,j} = & (A_0^{II,j} + B_0^{II,j} \ln(r)) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{II,j} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-k_{ka}} + B_k^{II,j} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k_{ka}} \right) \cos(k_{ka}(\theta - \alpha_j)) \\ & + \sum_{m=1} \left(A_m^{II,j} \frac{\sinh(k_{mr}(\theta - \alpha_j))}{\sinh(k_{mr}a)} \right. \\ & \left. + B_m^{II,j} \frac{\sinh(k_{mr}(\theta - (\alpha_j + a)))}{\sinh(k_{mr}a)} \right) \sin \left[k_{mr} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (4) \end{aligned}$$

여기서, $A_0, B_0, A_k, B_k, A_m, B_m$ 은 각각 미정계수를 나타내며, α_j 는 회전자 코어의 위치, a 는 회전자 코어의 폭, $k_{ka} = k\pi/a$ 및 $k_{mr} = m\pi/\ln(r_2/r_1)$, k, m 은 각각 푸리에 급수의 고조파를 나타낸다.

회전자 영구자석(III) 영역에서는 푸아송 방정식과 원주방향으로의 노이만 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_z^{III,j} = & (A_0^{III,j} + B_0^{III,j} \ln(r) - \mu_0 M_j r) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{III,j} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-k_{kb}} + B_k^{III,j} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{k_{kb}} \right) \cos(k_{kb}(\theta - \beta_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m^{III,j} \frac{\sinh(k_{mr}(\theta - \beta_j))}{\sinh(k_{mr}b)} \right. \\
 & \left. + B_m^{III,j} \frac{\sinh(k_{mr}(\theta - (\beta_j + b)))}{\sinh(k_{mr}b)} \right) \sin \left[k_{mr} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서, M_j 는 영구자석 자화, β_j 는 회전자 영구자석의 위치, b 는 회전자 영구자석의 폭, $k_{kb} = k\pi b$ 를 나타낸다.

공극(IV) 영역에서는 라플라스 방정식과 원주방향으로의 연속 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_z^{IV} &= (A_0^{IV} + B_0^{IV} \ln(r)) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{IV} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{-n} + B_n^{IV} \left(\frac{r}{r_3} \right)^n \right) \cos(n\theta) \\
 & + \left(C_n^{IV} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{-n} + D_n^{IV} \left(\frac{r}{r_3} \right)^n \right) \sin(n\theta) \mathbf{i}_z \quad (6)
 \end{aligned}$$

고정자 치(V) 영역에서는 라플라스 방정식과 원주방향으로의 노이만 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_z^{V,i} &= (A_0^{V,i} + B_0^{V,i} \ln(r)) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{V,i} \left(\frac{r}{r_3} \right)^{-k_{kc}} + B_k^{V,i} \left(\frac{r}{r_4} \right)^{k_{kc}} \right) \cos(k_{kc}(\theta - \gamma_i)) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m^{V,i} \frac{\sinh(k_{ms}(\theta - \gamma_i))}{\sinh(k_{ms}c)} \right. \\
 & \left. + B_m^{V,i} \frac{\sinh(k_{ms}(\theta - (\gamma_i + c)))}{\sinh(k_{ms}c)} \right) \sin \left[k_{ms} \ln \left(\frac{r}{r_3} \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (7)
 \end{aligned}$$

여기서, γ_i 는 고정자 치의 위치, c 는 회전자 영구자석의 폭, $k_{kc} = k\pi c$ 및 $k_{ms} = m\pi \ln(r_4/r_3)$ 를 나타낸다.

고정자 코일(VI) 영역에서는 푸아송 방정식과 원주방향으로의 노이만 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_z^{VI,i} &= \left(A_0^{VI,i} + B_0^{VI,i} \ln(r) - \frac{1}{4} \mu_0 J_z^i r^2 \right) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{VI,i} \left(\frac{r}{r_3} \right)^{-k_{kd}} + B_k^{VI,i} \left(\frac{r}{r_4} \right)^{k_{kd}} \right) \cos(k_{kd}(\theta - \delta_i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m^{VI,i} \frac{\sinh(k_{ms}(\theta - \delta_i))}{\sinh(k_{ms}d)} \right. \\
 & \left. + B_m^{VI,i} \frac{\sinh(k_{ms}(\theta - (\delta_i + d)))}{\sinh(k_{ms}d)} \right) \sin \left[k_{ms} \ln \left(\frac{r}{r_3} \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서, J_z^i 는 고정자 권선의 전류밀도, δ_i 는 고정자 슬롯의 위치, d 는 고정자 슬롯의 폭, $k_{kd} = k\pi d$ 를 나타낸다.

고정자 요크(VII) 영역에서는 푸아송 방정식과 원주방향으로의 노이만 경계 조건을 이용하면 다음과 같이 일반해를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_z^{VII} &= B_0^{VII} \ln(r/r_5) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{VII} \left(\left(\frac{r}{r_5} \right)^n - \left(\frac{r}{r_5} \right)^{-n} \right) \cos(n\theta) \right. \\
 & \left. + C_n^{VII} \left(\left(\frac{r}{r_5} \right)^n - \left(\frac{r}{r_5} \right)^{-n} \right) \sin(n\theta) \right] \mathbf{i}_z \quad (9)
 \end{aligned}$$

각 영역의 미정계수는 반경 방향 및 원주 방향으로의 경계 조건을 푸리에 급수로 전개하여 계산한다[14].

III. 전자장 해석 결과 및 비교

2차원 극좌표계 기반의 서브도메인법으로 도출된 전자장 해석 결과는 상용 유한요소(FE) 해석 소프트웨어(Ansys Electronics Desktop 2024 R2)의 해석 결과와의 비교를 통해 제안된 해석 방법의 신뢰성을 검증하였다. FE 해석 모델의 모델링 변수와 매쉬 형상은 Table I과 Fig. 3과 같으며, 매쉬 개수는 18042개이다.

제안된 해석 모델의 공간고조파 차수는 n 치는 200, k 와 m 치는 각각 40으로 설정하였으며, 빠른 해석을 위해 유효 고조파 성분만 고려하여 해석을 수행하였다. 지배방정식, 일반해, 경계조건 및 해석해 계산에 대한 신뢰성은 공극에서의 자속밀도를 FE 해석 결과와 비교함으로써 확인하였다. 다음은 자기벡터포텐셜과 공극에서의 반경방향 및 원주방향 자속밀

Table I. Specifications of the spoke-type PMSM.

Symbol	Value	Symbol	Value
r_1	36 mm	a	20 deg.
r_2	89.6 mm	b	70 deg.
r_3	90.6 mm	c	30 deg.
r_4	120.6 mm	d	30 deg.
r_5	136 mm	P/Q	4/6
l_{stk}	50 mm	B_r	1 T

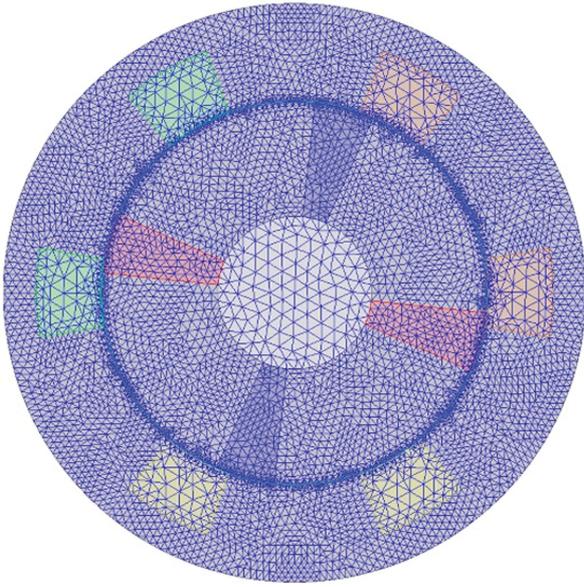


Fig. 3. (Color online) Analysis model for finite element analysis.

도를 나타낸다.

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{B}_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{i}_\theta \quad (10)$$

Figs. 4, 5, 6은 무부하 조건에서 철심 투자율에 따른 공극 자속밀도를 나타낸다.

Figs. 7, 8, 9은 철심 투자율에 따른 전기자 반작용 자계를 나타낸다.

정자계 해석을 위해 소요되는 시간은 FE해석이 21초 소요되는 반면 제안된 해석 방법은 0.02초가 소요되었다. 두 해석 조건 모두 철심의 선형 비투자율을 가정한 조건이며, 반복법을 이용한 비선형 해석의 경우 해석 시간이 더 많이 차이 날 것으로 판단된다. 해석 결과로부터 제안된 해석 방법은 빠르고 신뢰성 있는 해석 결과를 가지므로, 초기 설계 및 설계 변수-성능 간의 관계를 파악하여 spoke-type PMSM의 설계 통찰력을 기르는데 유용할 것으로 사료된다.

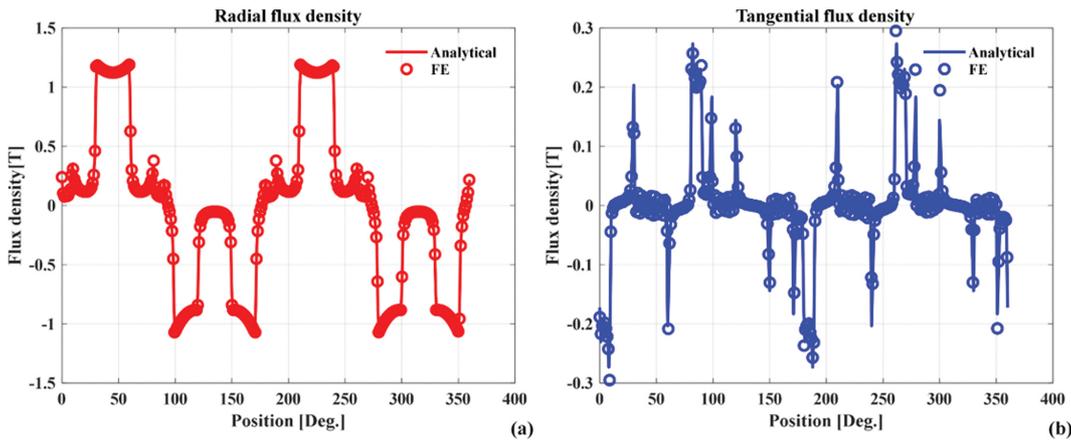


Fig. 4. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by PMs when the core magnetic permeability is 100: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

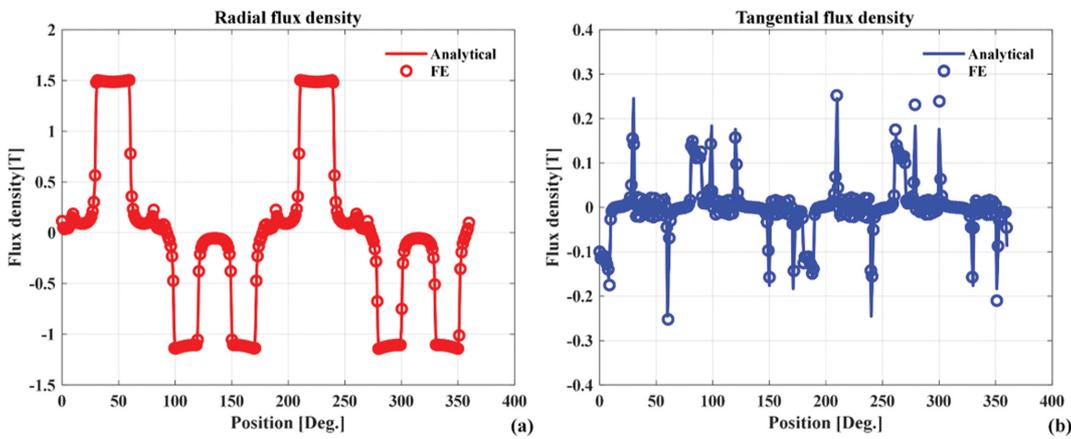


Fig. 5. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by PMs when the core magnetic permeability is 600: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

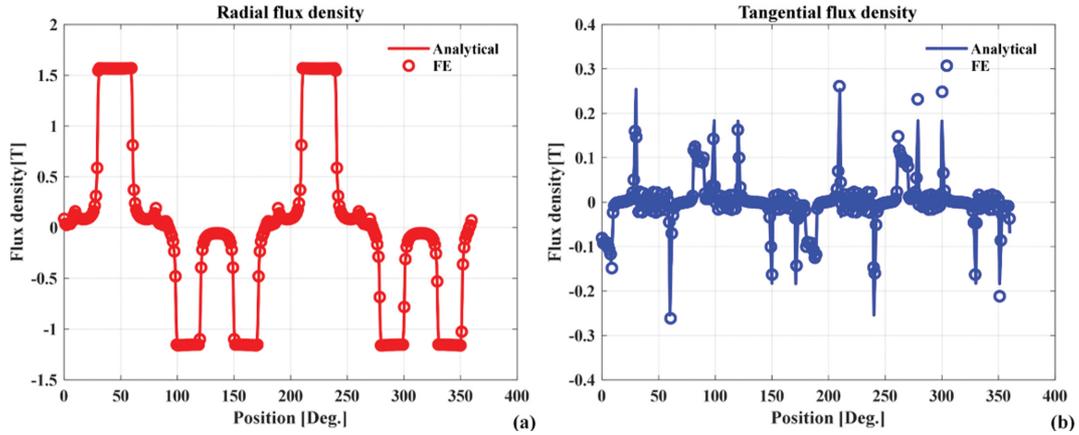


Fig. 6. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by PMs when the core magnetic permeability is 3,000: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

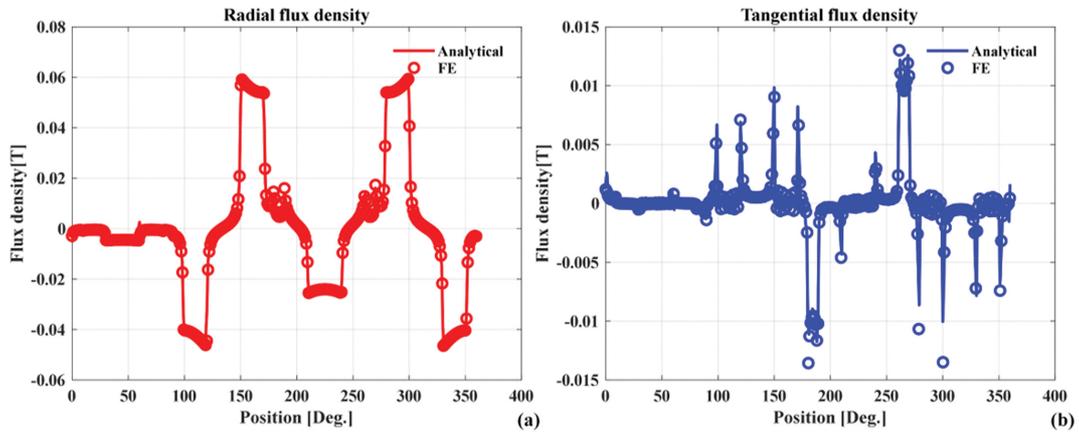


Fig. 7. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by coils when the core magnetic permeability is 100: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

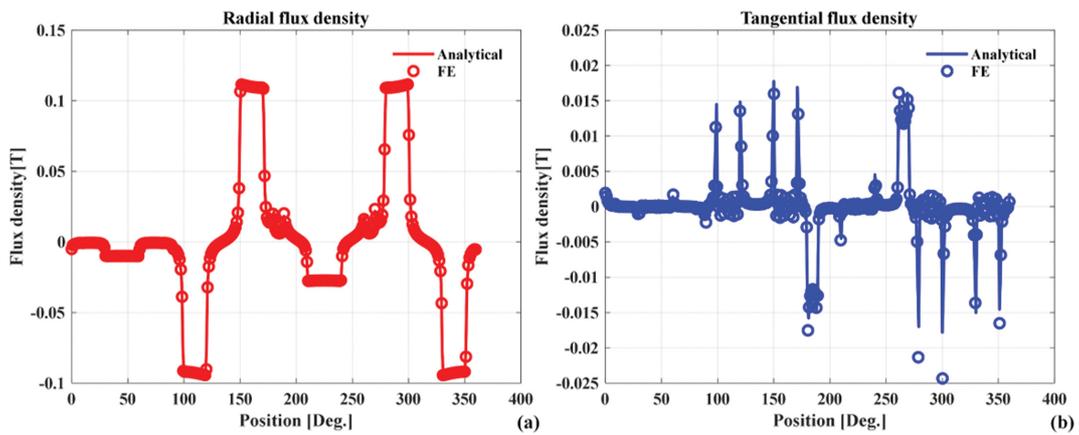


Fig. 8. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by coils when the core magnetic permeability is 600: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

IV. 결 론

본 연구에서는 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 전자기

해석을 위해 서브도메인법을 적용하였으며, 철심의 비투자율에 따른 영구자석 동기전동기의 자계 분포에 대한 영향을 분석하였다. 철심의 비투자율을 고려한 전자기 해석은 전자기

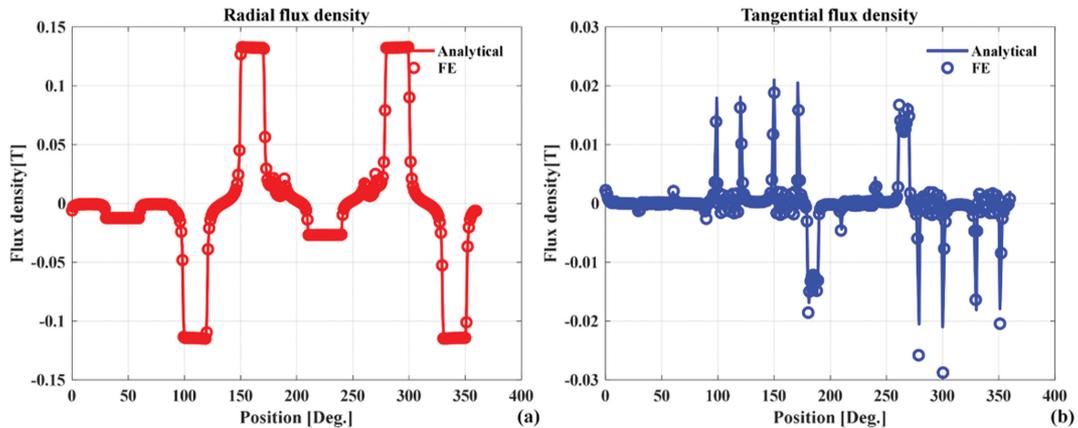


Fig. 9. (Color online) Comparison of the magnetic flux density distributions by coils when the core magnetic permeability is 3000: (a) radial and (b) circumferential magnetic flux densities.

설계의 정확도를 높이는 중요한 요소로 작용하며, 이를 통해 무부하 및 전기자 반작용 자계에 의한 자속 밀도를 빠르고 정확하게 예측할 수 있음을 확인하였다. FE 해석 결과와의 비교를 통해 제안된 서브도메인 해석 방법의 신뢰성과 정확성이 입증되었으며, 특히 해석 속도 면에서 현저한 이점을 확인하였다. 이는 초기 설계 단계에서 설계 변수와 성능 간의 관계를 빠르게 파악하여 Spoke 타입 영구자석 동기전동기의 설계 최적화에 중요한 통찰력을 제공한다. 본 논문의 해석 방법은 영구자석 동기전동기의 다양한 기하학적 구조를 처리하는 데 적용 가능하며, 향후 비선형 해석을 위한 반복법이 연구된다면 전기기기 설계 및 최적화에 유용한 기법으로 활용될 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2023~2024년도 창원대학교 자율연구과제 연구비 지원으로 수행된 연구결과임.

References

[1] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, *IEEE Trans. Magn.* **48**, 2080 (2012).

[2] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, *IEEE Trans. Magn.* **54**, 8103315 (2018).

[3] L. J. Wu, Z. Li, X. Huang, Y. Zhong, Y. Fang, and Z. Q. Zhu, *IEEE Trans. Magn.* **54**, 8103812 (2018).

[4] K.-H. Shin, J.-H. Lee, S. Sung, J.-H. Park, and J.-Y. Choi, *IEEE Trans. Magn.* **59**, 8103905 (2023).

[5] S. Ferrari, P. Ragazzo, G. Dilevrano, and G. Pellegrino, *IEEE Trans. Ind. Appl.* **59**, 1500 (2023).

[6] G. Y. Sizov, D. M. Ionel, and N. A. O. Demerdash, *IEEE Trans. Ind. Electron.* **59**, 2403 (2012).

[7] L. J. Wu, Z. Q. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, *IEEE Trans. Magn.* **47**, 1693 (2011).

[8] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, *IEEE Trans. Magn.* **47**, 479 (2011).

[9] B. Hannon, P. Sergeant, L. Dupré, and P.-D. Pfister, *IEEE Trans. Magn.* **55**, 8107217 (2019).

[9] Y. Oner, Z. Q. Zhu, L. J. Wu, X. Ge, H. Zhan, and J. T. Chen, *IEEE Trans. Ind. Electron.* **63**, 4105 (2016).

[10] B. L. J. Gysen, K. J. Meessen, J. J. H. Paulides, and E. A. Lomonova, *IEEE Trans. Magn.* **46**, 39 (2010).

[11] Z. Djelloul-Khedda, K. Boughrara, F. Dubas, A. Kechroud, and A. Tikellaline, *IEEE Trans. Magn.* **55**, 6300112 (2019).

[12] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, *Prog. Electromagn. Res. B.* **77**, 85 (2017).

[13] K.-H. Shin and H.-W. Cho, *J. Korean Magn. Soc.* **32**, 39 (2022).

[14] F. Dubas and K. Boughrara, *Math. Comput. Appl.* **22**, 42 (2017).