

Study on Influence of Cogging Torque on PMSM Considering Aleatoric Uncertainties

Ki-O Kim and Myung-Seop Lim*

Department of Automotive Engineering, Hanyang University, Seoul 04763, South Korea

Younjae Hwang, Won-Seok Cha, Kwon-Yong Lee, and Jae-Hyeon Kim

Department of Automotive Engineering (Automotive-Computer Convergence), Hanyang University, Seoul 04763, South Korea

(Received 17 March 2026, Received in final form 11 May 2026, Accepted 11 May 2026)

The fundamental order of cogging torque generation in permanent magnet synchronous motors (PMSMs) is generally known as the least common multiple (LCM) of the number of poles and slots. However, due to aleatoric uncertainties, cogging torque can significantly increase compared to the ideal case and occur at other orders than the fundamental order. This study analyzed the impact of aleatoric uncertainties on the cogging torque of PMSMs using a mathematical approach. Uncertainties in the stator and rotor generate multiples of the pole and slot order. In the case of eccentricity, it is affected by multiples of the pole order and the spatial order of the eccentricity function. Furthermore, the fundamental order of cogging torque was confirmed to be related to all uncertainty conditions. These results suggest that the influence of uncertainty should be considered in PMSM designs requiring low cogging torque.

Keywords : aleatoric uncertainty, cogging torque, eccentricity, manufacturing tolerance, permanent magnet synchronous motor

내재적 불확실성을 고려한 PMSM의 코깅 토크 영향 연구

김기오 · 임명섭*

한양대학교 미래자동차공학과, 서울시 왕십리로 222, 04763

황윤재 · 차원석 · 이권용 · 김재현

한양대학교 미래자동차공학과(미래자동차-SW융합전공), 서울시 왕십리로, 222, 04763

(2026년 3월 17일 받음, 2026년 5월 11일 최종수정본 받음, 2026년 5월 11일 게재확정)

일반적으로 영구자석 동기모터의 코깅 토크 기본 차수는 극 수, 슬롯 수의 최소공배수로 알려져 있다. 그러나 내재적 불확실성에 의해 코깅 토크는 이상적인 경우 대비 훨씬 커질 수 있으며, 극 수, 슬롯 수의 최소공배수 차수가 아닌 다른 차수에서도 크게 발생할 수 있다. 본 연구에서는 내재적 불확실성을 고려하였을 때, PMSM의 코깅 토크에 대한 영향을 수식적 접근을 통해 분석하였다. 고정자와 회전자 불확실성에 의해 극 수 및 슬롯 수의 배수 차수가 발생하며, 편심의 경우 극 수의 배수 차수와 편심 함수의 공간 차수에 영향을 받는 것이 확인되었다. 또한 코깅 토크의 기본 차수는 모든 불확실성 조건과 관계된 것을 확인하였다. 이러한 결과는 낮은 코깅 토크를 요구하는 PMSM 설계에서 불확실성에 의한 영향을 고려해야 함을 시사한다.

주제어 : 내재적 불확실성, 영구자석 동기모터, 제작 공차, 코깅 토크, 편심

I. 서 론

최근 산업 전반에 걸쳐 모터의 고출력화에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 그 중 영구자석 동기모터(Permanent

Magnet Synchronous Motor, PMSM)는 높은 출력 밀도와 효율, 넓은 운전영역을 특징으로 전기자동차, 로봇, 가전 제품 등 널리 사용되고 있다. 이러한 PMSM의 출력 밀도를 더욱 향상시키기 위한 다양한 방법들이 있다. 그 중에서 고정

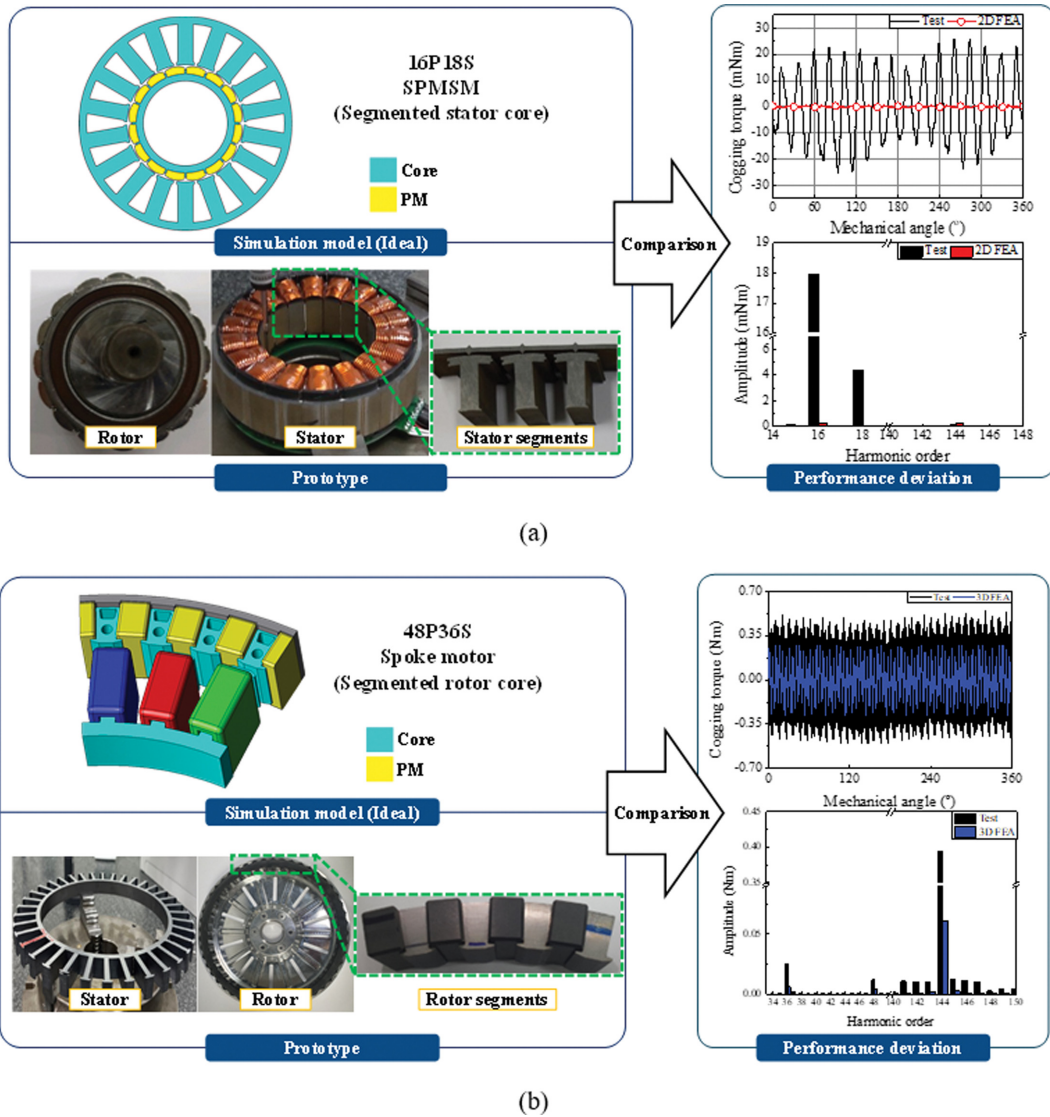


Fig. 1. (Color online) PMSM with segmented core and cogging torque measurement data (a) 16P18S SPMSM (Segmented stator core) (b) 48P36S Spoke-type PMSM (Segmented rotor core).

자 또는 회전자 코어를 일체형이 아닌 분할 코어 또는 전개형 코어를 적용하여 권선의 노즐 이동 제한이 완화되어 점착률을 향상시키거나, 누설 지속 경로를 제거하는 방법이 있다 [1-3]. 그러나 분할 또는 전개형 코어를 적용하게 되면 제조 공차, 편심 등의 내재적 불확실성(Aleatoric uncertainty)에 영향이 커지게 된다. 이에 따라 코깅 토크가 이상적인 경우 보다 매우 커지는 단점이 있다[4]. Fig. 1은 고정자에 분할 코어가 적용된 16극 18슬롯 표면부착형 영구자석 동기모터 (Surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Motor, SPMSM)와 회전자에 분할 코어가 적용된 48극 36슬롯의 Spoke-type PMSM의 형상과 코깅 토크 시험 결과를 나타낸다. Fig. 1에서 볼 수 있듯이 실제 코깅 토크 값은 FEA 값에 비해 크며 주요 차수도 일부 상이한 것을 알 수 있다. 따

라서 분할 또는 전개형 코어를 적용하여 PMSM 설계 시에는 내재적 불확실성을 반드시 고려해야한다. 많은 연구에서 코깅 토크 저감을 위해서 다양한 방법들이 시도되어왔다. 그러나 대부분의 연구들은 불확실성을 고려하지 않은 이상적인 경우에서의 코깅 토크의 저감만을 위해 연구가 수행되었다. 이러한 경우에는 분할, 전개형 코어 등이 적용된 모터의 경우 예상되는 코깅 토크와 실제 제작된 모터의 코깅 토크 오차가 매우 클 수 있다.

PMSM에서 내재적 불확실성은 대표적으로 제작 공차와 편심이 있다. 이러한 불확실성을 고려하여 코깅 토크를 개선한 사례들도 있다. 그러나 기존 대부분의 연구들은 이러한 불확실성에 의한 영향을 원인 분석 보다는 강건최적설계를 통해 그 영향을 최소화하는 것에 그친다[4]. 각 불확실성 인자들이

PMSM 코깅 토크에 미치는 영향을 분석한 사례도 있다[5]. 그러나 실제 모터는 제작 공차와 편심이 독립적으로 발생하는 것이 아니고 동시에 발생하며 서로 영향을 줄 수 있다. 따라서 실제 불확실성 인자들에 의한 영향은 동시에 발생할 때의 기준으로 어떠한 영향을 미치는 지를 연구할 필요가 있고 체계적으로 정리할 필요가 있다. 기존에는 각 불확실성에 영향을 복합적으로 연구한 사례가 거의 없다. 따라서 본 논문에서는 불확실성 인자들을 구분하고, 각각의 불확실성 인자들만 고려하였을 때 뿐만 아니라 모든 불확실성 인자들을 고려하였을 때 PMSM의 코깅 토크에 미치는 영향을 수식적으로 분석한다. 분석된 결과와 실제 제작된 48극 36슬롯 PMSM의 코깅 토크 시험 결과와 비교하여 고찰하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 불확실성의 종류에 따라 구분하고, 3장에서는 각 불확실성 인자들에 의한 PMSM의 코깅 토크를 다룬다. 4장에서는 모든 불확실성을 고려했을 때의 PMSM의 코깅 토크 영향을 분석한다. 5장에서는 시험 결과와 비교, 6장에서 결론을 제시한다.

II. PMSM의 불확실성

일반적으로 불확실성은 모델링, 시뮬레이션, 제작, 제어 등의 과정에서 결과를 정확히 예측하기 어렵게 만드는 요인을 말한다. 불확실성은 내재적 불확실성(Aleatoric Uncertainty)과 인식론적 불확실성(Epistemic Uncertainty) 두 가지로 나눌 수 있다. 내재적 불확실성이란 시스템이나 환경 자체에 내재된 변동성을 나타내며, 영구자석 개체 간의 잔류자속밀도 편차 등의 재료 가공, 제조 과정에서 발생하는 물성의 산포가 대표적인 예시가 될 수 있다. 인식론적 불확실성은 지식 부족으로 인해 생기는 불확실성으로 모델링의 단순화로 인한 불

확실성을 나타낸다. Fig. 1에 나타내었던 코깅 토크의 시험 결과는 내재적 불확실성 인자들, 즉 여러가지 제작 공차들로 인해 시뮬레이션 값과 크게 오차가 발생하였다.

PMSM에서의 내재적 불확실성 인자는 크게 3가지로 나눌 수 있다. 회전자 공차, 고정자 공차, 그리고 편심이 있다. 따라서 각 불확실성 인자들에 따라 코깅 토크에 어떻게 영향을 미치는 지 구분할 수 있고, Fig. 2에 나타내었다. 회전자 공차(ΔF)는 PM 두께, 너비, 잔류자속밀도, 위치, 회전자 외경 등 다양한 공차들이 있다. 고정자 공차(ΔG)로는 고정자 치의 내반경, 치 끝의 너비, 접합부 유격, 슬롯 오픈닝 너비 등 회전자 공차와 마찬가지로 다양한 공차가 존재한다. 마지막으로 편심은 회전자 중심과 고정자 중심이 일치하지 않아 공극 길이가 공간적으로 또는 시간적으로 불균일해질 수 있는 현상으로 정적 편심(Static eccentricity), 동적 편심(Dynamic eccentricity), 혼합 편심(Mixed eccentricity)으로 구분할 수 있다. 각 불확실성 인자들에 의한 코깅 토크의 결과는 회전자 공차, 고정자 공차, 편심 각각의 의한 영향과 각 불확실성 인자들이 혼합되었을 때를 포함하여 대략적으로 7가지 정도로 나타낼 수 있다. 다음 장에서 각 불확실성에 의한 코깅 토크에 영향을 분석한다.

III. 각 불확실성 인자에 따른 PMSM 코깅 토크 영향

코깅 토크는 무부하 상태에서 PM과 슬롯형 코어 구조 사이에 상호 작용에 의해 발생하며, 회전자가 안정적인 위치에 정렬되려는 경향으로 나타난다. 코깅 토크는 회전자가 회전함에 따라 모터 내부에서 발생하는 에너지의 변화로 표현된다. PM과 코어의 에너지 변화는 공극의 에너지 변화에 비해 무시할

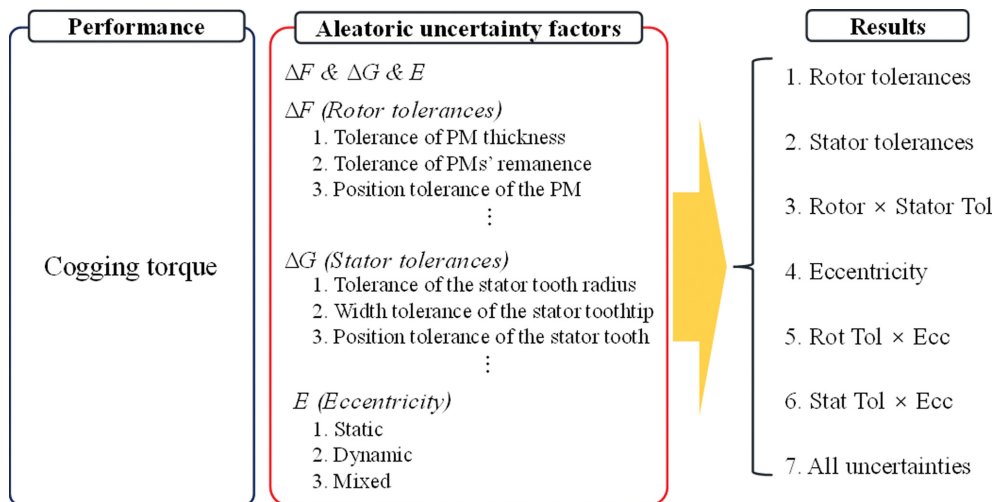


Fig. 2. (Color online) Combination of cogging torque and aleatoric uncertainty factors.

수 있으므로, 공극에서의 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$W(\alpha) \approx W(\alpha)_{\text{airgap}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V G^2(\theta) F^2(\theta, \alpha) dV \quad (1)$$

여기서, θ 는 고정자 기준 좌표계에서의 각도, α 는 고정자 기준 좌표계에서의 회전자 위치이다. μ_0 는 공기 투자율, $G(\theta)$ 는 상대적인 공극 퍼미언스 항, $F(\theta, \alpha)$ 는 PM에 의한 기자력 항이다. 여기서 부피 적분은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_V (\cdot) dV = L_{stk} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} (\cdot) r d\theta dr = \frac{L_{stk}}{2} (R_2^2 - R_1^2) \int_0^{2\pi} (\cdot) d\theta \quad (2)$$

여기서 L_{stk} 는 적층 길이, R_1 은 내경, R_2 는 외경이다. 따라서 공극에서의 에너지와 코깅 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(\alpha)_{\text{airgap}} = K \int_0^{2\pi} G^2(\theta) F^2(\theta, \alpha) d\theta, K = \frac{L_{stk}}{4\mu_0} (R_2^2 - R_1^2) \quad (3)$$

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = -K \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{2\pi} G^2(\theta) F_{PM}^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (4)$$

$$G^2(\theta) = G_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_{a_n N_s}^{(2)} \cos nN_s \theta + G_{b_n N_s}^{(2)} \sin nN_s \theta \right] \quad (5)$$

$$F_{PM}^2(\theta, \alpha) = F_0^{(2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[F_{a_m N_p}^{(2)} \cos mN_p(\theta + \alpha) + F_{b_m N_p}^{(2)} \sin mN_p(\theta + \alpha) \right] \quad (6)$$

여기서 N_s 는 슬롯 수, N_p 는 극 수를 나타낸다. 식(5)와 (6)의 적분은 삼각함수 공식에 의해 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} G^2 F^2 d\theta = \begin{cases} 0, & nN_s \neq mN_p \\ \neq 0, & nN_s = mN_p \end{cases} \quad (7)$$

식(7)에서 $nN_s = mN_p$ 에서만 적분이 0이 되지 않는 조건이다. 따라서 z 를 N_p 와 N_s 의 최소공배수로 정의하면, 식(7)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} G^2 F^2 d\theta = \pi \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ G_{a,lz} F_{a,lz} \cos(lz\alpha) + G_{a,lz} F_{b,lz} \sin(lz\alpha) - G_{b,lz} F_{a,lz} \sin(lz\alpha) + G_{b,lz} F_{b,lz} \cos(lz\alpha) \right\} \quad (8)$$

여기서 모터가 대칭일 경우, G_b 와 F_b 는 각각 0 이므로 코깅 토크는 다음과 같다.

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = \pi l z K \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ G_{a,lz} F_{a,lz} \sin(lz\alpha) \right\} \quad (9)$$

$$z = \text{LCM}(N_p, N_s) \Rightarrow lz (1z, 2z, \dots)$$

따라서 불확실성이 없을 때의 이상적인 코깅 토크는 $\text{LCM}(N_p, N_s)$ 의 크기의 비례하며, 고조파 차수는 $\text{LCM}(N_p, N_s)$ 의 배수에서 발생한다. 다음으로 임의의 회전자 공차(ΔF)가

있을 경우, 코깅 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = -K \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{2\pi} G^2(\theta) \{ F^2(\theta, \alpha) + \Delta F^2(\theta, \alpha) \} d\theta \quad (10)$$

$$\Delta F^2(\theta, \alpha) = \sum_{q=0}^{\infty} \left[\Delta F_{a,q} \cos q(\theta + \alpha) + \Delta F_{b,q} \sin q(\theta + \alpha) \right] \quad (11)$$

여기서 q 는 공차 차수이다. 회전자 공차는 임의적이므로 대칭 조건이 성립하지 않기 때문에 F_b 는 0이 아니다. 회전자 공차에 의한 성분만 따로 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta T_{\text{cog}}(\alpha) = -K \int_0^{2\pi} G^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta F^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (12)$$

식(12)에 식(11)에 수식을 대입하면 다음과 같다.

$$\Delta T_{\text{cog}}(\alpha) = -K \sum_{q=0}^{\infty} q \int_0^{2\pi} G^2(\theta) \left\{ \begin{aligned} & -\Delta F_{a,q} \sin q(\theta + \alpha) \\ & + \Delta F_{b,q} \cos q(\theta + \alpha) \end{aligned} \right\} d\theta \quad (13)$$

식(13)에서의 적분항만 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} \cos nN_s \theta \{ \sin q(\theta + \alpha) + \cos q(\theta + \alpha) \} d\theta \quad (14)$$

여기서 중괄호 안에 사인 및 코사인 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sin q(\theta + \alpha) &= \sin(q\theta) \cos(q\alpha) + \cos(q\theta) \sin(q\alpha) \\ \cos q(\theta + \alpha) &= \cos(q\theta) \cos(q\alpha) + \sin(q\theta) \sin(q\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 삼각함수 적분에 의해 $\cos(nN_s \theta) \sin(q\theta)$ 항은 0이 된다. 적분 후에도 0이 아닌 항과 조건은 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} \cos nN_s \theta \cos(q\theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & q = nN_s \\ 0, & q \neq nN_s \end{cases} \quad (16)$$

식(7)과 마찬가지로 식(16)에서 0이 아닌 조건은 $q = nN_s$ 이다. 따라서 회전자 공차가 코깅 토크에 미치는 영향을 나타내는 식(13)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{cog}}(\alpha) &= \pi K \sum_{n=1}^{\infty} nN_s G_{a,nN_s} \sqrt{\Delta F_{a,nN_s}^2 + \Delta F_{b,nN_s}^2} \sin(nN_s \alpha + \theta_{rl}) \\ \theta_{rl} &= \arctan 2(-\Delta F_{b,nN_s}, \Delta F_{a,nN_s}) \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)에서 알 수 있듯이, 회전자 공차(ΔF)에 의한 코깅 토크의 크기와 고조파 차수는 슬롯 수의 배수(nN_s)의 비례한다. 즉 영구자석의 잔류자속밀도의 차이, 영구자석의 치수 공차, 회전자 코어의 외경 공차 등에 의해 슬롯 수의 배수 차수의 코깅 토크가 발생된다.

다음으로 임의의 고정자 공차(ΔG)가 있을 경우, 코깅 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{cog}(\alpha) = -K \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{2\pi} \{G^2(\theta) + \Delta G^2(\theta)\} F^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (18)$$

$$\Delta G^2(\theta) = \sum_{q=0}^{\infty} [\Delta G_{a,q} \cos(q\theta) + \Delta G_{b,q} \sin(q\theta)] \quad (19)$$

식(11)과 마찬가지로 고정자 공차는 임의적이므로 대칭 조건이 성립하지 않기 때문에 G_b 는 0이 아니다. 고정자 공차에 의한 성분만 따로 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta T_{cog}(\alpha) = -K \int_0^{2\pi} \Delta G^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \alpha} F^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (20)$$

식(20)에 식(19)의 수식을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta T_{cog}(\alpha) \\ = K \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} G_{a,q} \cos(q\theta) \\ + G_{b,q} \sin(q\theta) \end{array} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} m N_p F_{a_m N_p}^{(2)} \sin m N_p (\theta + \alpha) d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

식(21)에서의 적분항만 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} \{\cos(q\theta) + \sin(q\theta)\} \sin m N_p (\theta + \alpha) d\theta \quad (22)$$

식(22)에서의 사인 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\sin m N_p (\theta + \alpha) = \sin(m N_p \theta) \cos(m N_p \alpha) + \cos(m N_p \theta) \sin(m N_p \alpha) \quad (23)$$

식(22)과 (23)을 조합하여 수식을 정리하면 삼각함수의 직교성에 의해 $\cos(q\theta)\sin(m N_p \theta)$ 와 $\sin(q\theta)\cos(m N_p \theta)$ 의 적분은 0이 된다. 적분 후에도 0이 아닌 항과 조건은 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} \cos(q\theta) \cos(m N_p \theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & q = m N_p \\ 0, & q \neq m N_p \end{cases} \quad (24)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(q\theta) \sin(m N_p \theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & q = m N_p \\ 0, & q \neq m N_p \end{cases} \quad (25)$$

식(16)과 유사하게 식(24), (25)에서 0이 아닌 조건은 $q = m N_p$ 다. 따라서 고정자 공차가 코깅 토크에 미치는 영향을 나타내는 식(20)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta T_{cog}(\alpha) = \pi K \sum_{m=1}^{\infty} m N_p B_{a, m N_p} \sqrt{\Delta G_{a, m N_p}^2 + \Delta G_{b, m N_p}^2} \sin(m N_p \alpha + \theta_{st}) \\ \theta_{st} = \arctan 2(\Delta G_{b, m N_p}, \Delta G_{a, m N_p}) \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)에서 나타난 바와 같이, 고정자 공차(ΔG)로 인한 코깅 토크는 극 수의 배수에 비례하고 고조파 차수는 극 수의 배수에서 발생한다. 즉 고정자 코어 내경 공차, 슬롯 오프닝 차수 공차 등에 의해 극 수의 배수 차수의 코깅 토크가 발생된다.

다음으로 편심에 의한 코깅 토크를 해석적으로 유도한다. 편심에 의한 영향을 고려할 때, 코깅 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{cog}(\alpha) = -K \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{2\pi} G^2(\theta) F^2(\theta, \alpha) E^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (27)$$

여기서 E^2 항은 혼합 편심의 영향을 나타내며 혼합 편심 계수로 정의되며 다음과 같이 표현된다[6].

$$E^2(\theta, \alpha) = E_s^2(\theta - \phi_s) E_d^2(\theta - \alpha - \phi_r) \quad (28)$$

$$E_s^2(\theta - \phi_s) = E_{s0}^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} D_s(\nu) \cos(\nu\theta - \nu\phi_s) \quad (29)$$

$$E_d^2(\theta - \alpha - \phi_r) = E_{d0}^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} D_d(\nu) \cos(\nu\theta - \nu\alpha - \nu\phi_r) \quad (30)$$

$$E^2(\theta, \alpha) = E_{\alpha 0}^2 + \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha) \quad (31)$$

여기서 아래 첨자 s 는 정적 편심, 아래 첨자 d 는 동적 편심을 나타내고 ν 는 편심에 의해 발생하는 공간고조파 차수로 여기서는 1차와 2차만 고려한다. 또한 α 는 고정자 기준 좌표계에서 회전자의 위치, μ 는 ν 의 차수의 조합을 나타내는 지표이다. 식(27)과 (31)를 고려하면 $G^2 F^2 E^2$ 의 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} G^2(\theta) F^2(\theta, \alpha) E^2(\theta, \alpha) \\ = \underbrace{G_0 F_0 E_{\alpha 0}^2}_{\text{integral} = 0} + \underbrace{G_0 F_0 \sum_{\mu_1, \mu_2} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha)}_{\{1\}} \\ + \underbrace{G_0 E_{\alpha 0}^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \cos m N_p (\theta + \alpha)}_{\text{integral} = 0} \\ + \underbrace{G_0 \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \cos m N_p (\theta + \alpha) \sum_{\mu_1, \mu_2} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha)}_{\{2\}} \\ + \underbrace{F_0 E_{\alpha 0}^2 \sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n N_s} \cos n N_s \theta}_{\text{integral} = 0} \\ + \underbrace{F_0 \sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n N_s} \cos n N_s \theta \sum_{\mu_1, \mu_2} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha)}_{\{3\}} \\ + \underbrace{E_{\alpha 0}^2 \sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n N_s} \cos n N_s \theta \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \cos m N_p (\theta + \alpha)}_{\text{Ideal cogging torque}} \\ + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n N_s} \cos n N_s \theta \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \cos m N_p (\theta + \alpha) \sum_{\mu_1, \mu_2} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha)}_{\{4\}} \end{aligned} \quad (32)$$

식(32)에서 적분 시 0이 되는 항과 이상적인 코깅 토크를 제외하면 {1}~{4}로 표현된 나머지 항들은 편심에 의해 추가

Table I. Conditions and orders of cogging torque generation due to eccentricity.

(μ_1, μ_2)	Type	$\mu_1 = mN_p - nN_s$ (Condition for θ integral to be non-zero)	Order ($\mu_2 \leq 2$)
(0, 1)	ME	0	1 st order
(1, 0)	SE	1	mN_p
(1, ± 1)	DE	1	$mN_p \pm 1$
(1, 2)	ME	1	$mN_p \pm 2$
(2, 0)	SE	2	mN_p
(2, 1)	ME	2	$mN_p \pm 1$
(2, 2)	DE	2	$mN_p \pm 2$
(3, 1)	ME	3	$mN_p \pm 1$
(3, 2)	ME	3	$mN_p \pm 2$

적으로 발생하는 코깅 토크 성분이다. {1}에 대한 코사인 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{2\pi} \cos(\mu_1\theta - \mu_2\alpha) d\theta = \begin{cases} 2\pi \cos(\mu_2\alpha), & \mu_1 = 0 \\ 0, & \mu_1 \neq 0 \end{cases} \quad (33)$$

따라서 식(32)에서 {1}항에 의한 코깅 토크 성분은 다음과 같다.

$$T_{cog\{1\}}(\alpha) = 2\pi K G_0 F_0 \sum_{\mu_2 \geq 1} \mu_2 D_\alpha(0, \mu_2) \sin(\mu_2\alpha) \quad (34)$$

$(\mu_1, \mu_2) = (0, 1)$

식(33)에서 볼 수 있듯이, 적분이 0이 아닌 조건은 $\mu_1 = 0$ 이다. 이때 $\mu_2 = 1$ 만 존재한다. 따라서 식(34)에서 가능한 코깅 토크 차수는 1차이다. 또한 G 와 F 의 상수항에 의해서만 생성되므로 극 수와 슬롯 수와는 무관하다. 따라서 편심에 의한 식(34)는 극 수, 슬롯 수와 관계없이 편심 발생 시, 1차 코깅 토크 성분이 반드시 발생함을 의미한다. 마찬가지로 {2}, {3} 항을 정리하면 다음과 같다.

$$T_{cog\{2\}}(\alpha) = K G_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu_2} (mN_p \pm \mu_2) F_{a_m N_p} D_\alpha(mN_p, \mu_2) \sin(mN_p \pm \mu_2)\alpha \quad (35)$$

$$T_{cog\{3\}}(\alpha) = \pi K F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu_2} \mu_2 G_{a_n N_s} D_\alpha(nN_s, \mu_2) \sin(\mu_2\alpha) \quad (36)$$

이때에 식(35)과 (36)항은 적분이 0이 아닌 조건이 각각 $\mu_1 = mN_p$, $\mu_1 = nN_s$ 로 차수가 매우 높으므로 크기는 매우 작아지므로 무시한다. 식 {4} 코사인 삼중곱을 전개하고 고차항을 제외하면 다음과 같은 적분항이 남는다.

$$\int_0^{2\pi} \cos\{(nN_s - mN_p + \mu_1)\theta - (mN_p + \mu_2)\alpha\} d\theta = \begin{cases} 2\pi \cos(mN_p + \mu_2)\alpha, & nN_s - mN_p + \mu_1 = 0 \\ 0, & nN_s - mN_p + \mu_1 \neq 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\{(nN_s - mN_p - \mu_1)\theta - (mN_p - \mu_2)\alpha\} d\theta = \begin{cases} 2\pi \cos(mN_p - \mu_2)\alpha, & nN_s - mN_p - \mu_1 = 0 \\ 0, & nN_s - mN_p - \mu_1 \neq 0 \end{cases} \quad (38)$$

식(37)와 (38)에서 적분이 0이 되지 않는 조건은 $\mu_1 = |nN_s - mN_p|$ 이다. 따라서 {4}항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{cog\{4\}}(\alpha) = \frac{\pi K}{2} \sum_{n, m=1}^{\infty} [(mN_p \pm \mu_2) G_{a_n N_s} B_{a_m N_p} D_\alpha(\mu_1, \mu_2) \sin\{(mN_p \pm \mu_2)\alpha\}] \quad (39)$$

식(39)에서 극 수의 배수와 μ_2 의 합차에 의한 코깅 토크 차수가 발생한다. 따라서 편심에 의한 코깅 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{cog}(\alpha) = T_{cog(ideal)}(\alpha) + T_{cog\{1\}}(\alpha) + T_{cog\{4\}}(\alpha) \quad (40)$$

편심의 영향만을 고려할 때 θ 적분이 0이 되지 않는 조건과 그에 따른 차수는 Table I에 나타내었다.

지금까지 회전자 공차, 고정자 공차, 편심에 의해서 코깅 토크를 수식적으로 분석하였다. 회전자 공차에 의해서는 슬롯 수의 배수 차수, 고정자 공차에 의해서는 극 수의 배수 차수, 편심에 의해서는 1차 성분과 극 수의 배수 차수 및 극 수 배수 차수의 $\pm$ 차수가 발생한다.

IV. 모든 불확실성 인자를 고려한 PMSM 코깅 토크

3장에서 각각의 불확실성 인자들에 의한 PMSM 코깅 토크를 수식적으로 분석하였다. 실제로는 각각의 불확실성 인자들이 독립적이지 않고 동시에 발생하며 상호작용한다. 따라서 이번 장에서는 모든 불확실성을 고려한 코깅 토크를 해석적으로 유도한다. 제조 공차와 편심을 모두 고려한 코깅 토크는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{cog}(\alpha) = -K \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{2\pi} \{G^2(\theta) + \Delta G^2(\theta)\} \{F^2(\theta, \alpha) + \Delta F^2(\theta, \alpha)\} E^2(\theta, \alpha) d\theta \quad (41)$$

E_0 terms group			
$E_0 G_0 F_0$	$E_0 G_0 \Sigma F$	$E_0 G_0 \Delta F_0$	$E_0 G_0 \Sigma \Delta F$
$E_0 \Sigma G F_0$	$E_0 \Sigma G \Sigma F$	$E_0 \Sigma G \Delta F_0$	$E_0 \Sigma G \Delta \Sigma F$
$E_0 \Delta G_0 F_0$	$E_0 \Delta G_0 \Sigma F$	$E_0 \Delta G_0 \Delta F_0$	$E_0 \Delta G_0 \Delta \Sigma F$
$E_0 \Sigma \Delta G F_0$	$E_0 \Sigma \Delta G \Sigma F$	$E_0 \Sigma \Delta G \Delta F_0$	$E_0 \Sigma \Delta G \Delta \Sigma F$
ΣE terms group			
$\Sigma E G_0 F_0$	$\Sigma E G_0 \Sigma F$	$\Sigma E G_0 \Delta F_0$	$\Sigma E G_0 \Delta \Sigma F$
$\Sigma E \Sigma G F_0$	$\Sigma E \Sigma G \Sigma F$	$\Sigma E \Sigma G \Delta F_0$	$\Sigma E \Sigma G \Delta \Sigma F$
$\Sigma E \Delta G_0 F_0$	$\Sigma E \Delta G_0 \Sigma F$	$\Sigma E \Delta G_0 \Delta F_0$	$\Sigma E \Delta G_0 \Delta \Sigma F$
$\Sigma E \Sigma \Delta G F_0$	$\Sigma E \Sigma \Delta G \Sigma F$	$\Sigma E \Sigma \Delta G \Delta F_0$	$\Sigma E \Sigma \Delta G \Delta \Sigma F$

$\frac{\partial F^2}{\partial \alpha} \Rightarrow F_0, \Delta F_0 = 0$ $F_0, \Delta F_0$ terms $\Rightarrow 0$

$nN_s \neq mN_r$
 $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos nN_s \theta \cos \{mN_r (\theta + \alpha)\} d\theta = 0$ $G_0, \Delta G_0$ terms $\Rightarrow 0$

Fig. 3. (Color online) Zero conditions for cogging torque terms considering all uncertainties.

식(41)의 적분 내부의 표현 식을 간단하게 표현하면

$$(G_0 + \Delta G_0 + \Sigma G + \Delta \Sigma G) \cdot (F_0 + \Delta F_0 + \Sigma F + \Delta \Sigma F) \cdot (E_0 + \Sigma E) \quad (42)$$

식(42)에서 총 32개의 항을 계산을 단순하게 하기위해서 E_0 항과 ΣE 로 분리하면 다음과 같다.

E_0 항

$$\begin{aligned} & E_0 G_0 F_0 + E_0 G_0 \Sigma F + E_0 G_0 \Delta F_0 + E_0 G_0 \Delta \Sigma F \\ & + E_0 \Sigma G F_0 + E_0 \Sigma G \Sigma F + E_0 \Sigma G \Delta F_0 + E_0 \Sigma G \Delta \Sigma F \\ & + E_0 \Delta G_0 F_0 + E_0 \Delta G_0 \Sigma F + E_0 \Delta G_0 \Delta F_0 + E_0 \Delta G_0 \Delta \Sigma F \\ & + E_0 \Sigma \Delta G F_0 + E_0 \Sigma \Delta G \Sigma F + E_0 \Sigma \Delta G \Delta F_0 + E_0 \Sigma \Delta G \Delta \Sigma F \end{aligned} \quad (43)$$

ΣE_0 항

$$\begin{aligned} & \Sigma E G_0 F_0 + \Sigma E G_0 \Sigma F + \Sigma E G_0 \Delta F_0 + \Sigma E G_0 \Delta \Sigma F \\ & + \Sigma E \Sigma G F_0 + \Sigma E \Sigma G \Sigma F + \Sigma E \Sigma G \Delta F_0 + \Sigma E \Sigma G \Delta \Sigma F \\ & + \Sigma E \Delta G_0 F_0 + \Sigma E \Delta G_0 \Sigma F + \Sigma E \Delta G_0 \Delta F_0 + \Sigma E \Delta G_0 \Delta \Sigma F \\ & + \Sigma E \Sigma \Delta G F_0 + \Sigma E \Sigma \Delta G \Sigma F + \Sigma E \Sigma \Delta G \Delta F_0 + \Sigma E \Sigma \Delta G \Delta \Sigma F \end{aligned} \quad (44)$$

식(43)과 (44)에서 0이 되는 조건을 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 8개의 0이 아닌 항이 있으며 Fig. 4처럼 분류할 수 있다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 이상적인 코깅 토크(T_I), 회전자 공차(T_{RT}), 고정자 공차(T_{ST}) 및 편심(T_{OE})만 각각 고려한 경우는 앞장에서 다루었다. 나머지 네 가지의 경우, 회전자와 고정자 공차를 함께 고려한 경우(T_{RST}), 회전자 공차

$E_0 \Sigma G \Sigma F$	T_I	: Ideal cogging torque
$E_0 \Sigma G \Delta \Sigma F$	T_{RT}	: Rotor tolerance
$E_0 \Delta \Sigma G \Sigma F$	T_{ST}	: Stator tolerance
$E_0 \Delta \Sigma G \Delta \Sigma F$	T_{RST}	: Rotor & Stator tolerance
$\Sigma E \Sigma G \Sigma F$	T_{OE}	: Only eccentricity
$\Sigma E \Sigma G \Delta \Sigma F$	T_{RTE}	: Rotor tolerance & eccentricity
$\Sigma E \Delta \Sigma G \Sigma F$	T_{STE}	: Stator tolerance & eccentricity
$\Sigma E \Delta \Sigma G \Delta \Sigma F$	T_{RSTE}	: Rotor & Stator tolerance & Eccentricity

Fig. 4. (Color online) Components of cogging torque considering all uncertainties.

와 편심(T_{RTE}), 고정자 공차와 편심(T_{STE}), 그리고 모든 불확실성을 고려한 코깅 토크(T_{RSTE})는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & T_{RST}(\alpha) \\ & = -\pi K \sum_{q=1}^{\infty} q \left[\Delta G_{a,q} \left\{ -\Delta F_{a,q} \sin(q\alpha) + \Delta F_{b,q} \cos(q\alpha) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \Delta G_{b,q} \left\{ -\Delta F_{a,q} \cos(q\alpha) - \Delta F_{b,q} \sin(q\alpha) \right\} \right] \quad (45) \\ & T_{RTE} = -K \int G^2 \frac{\partial \Delta F^2}{\partial \alpha} E^2 d\theta - K \int G^2 \Delta F^2 \frac{\partial E^2}{\partial \alpha} d\theta \\ & = -K \pi E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (nN_s) G_{a_n N_s} \Delta F_{b,r} \cos(nN_s \alpha), \quad r = nN_s \\ & \quad + K \pi G_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu_1, \mu_2} \left\{ -r F_{a,r} D_{\alpha}(r, \mu_2) \sin(r + \mu_2) \alpha \right. \\ & \quad \left. + r F_{b,r} D_{\alpha}(r, \mu_2) \cos(r + \mu_2) \alpha \right\}, \quad r = \mu_1 \\ & \quad + K \frac{\pi}{2} \sum_{n,r} \sum_{\mu_1, \mu_2} G_{a_n N_s} D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) r \begin{cases} \Delta F_{a,r} \sin(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = nN_s - r \\ + \Delta F_{b,r} \cos(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = nN_s - r \\ \Delta F_{a,r} \sin(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r + nN_s \\ + \Delta F_{b,r} \cos(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r + nN_s \end{cases} \\ & \quad - K 2\pi G_0 \Delta F_0 \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 D_{\alpha}(0, \mu_2) \sin(\mu_2 \alpha), \quad \mu_1 = 0 \\ & \quad + K \pi G_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu_2} \mu_2 D_{\alpha}(r, \mu_2) \begin{cases} -\Delta F_{a,r} \sin(r + \mu_2) \alpha \\ + \Delta F_{b,r} \cos(r + \mu_2) \alpha \end{cases}, \quad \mu_1 = r \\ & \quad - K \pi \Delta F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu_1, \mu_2} G_{a_n N_s} \mu_2 D_{\alpha}(nN_s, \mu_2) \sin(\mu_2 \alpha), \quad \mu_1 = nN_s \\ & \quad - K \frac{\pi}{2} \sum_{n,r} \sum_{\mu_2} G_{a_n N_s} \mu_2 D_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \begin{cases} \Delta F_{a,r} \sin(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = nN_s - r \\ - \Delta F_{b,r} \cos(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = nN_s - r \\ \Delta F_{a,r} \sin(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r \pm nN_s \\ + \Delta F_{b,r} \cos(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r \pm nN_s \end{cases} \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{STE} &= -K \int \Delta G^2 \frac{\partial F^2}{\partial \alpha} E^2 d\theta - K \int \Delta G^2 F^2 \frac{\partial E^2}{\partial \alpha} d\theta \\
&= K\pi \sum_{m=1}^{\infty} mN_p F_{a_m N_p} E_{\alpha 0}^2 (\Delta G_{a, mN_p} \sin mN_p \alpha + \Delta G_{b, mN_p} \cos mN_p \alpha), \quad q = mN_p \\
&+ K \sum_{m=1}^{\infty} mN_p F_{a_m N_p} \sum_{\mu_1, \mu_2} D_a(\mu_1, \mu_2) \pi \Delta G_0 \sin(mN_p + \mu_2) \alpha, \quad \mu_1 = mN_p \\
&+ \frac{\pi K}{2} \sum_{m=1}^{\infty} mN_p F_{a_m N_p} \sum_{\mu_1, \mu_2} D_a(\mu_1, \mu_2) \left[\begin{aligned} &\Delta G_{a, q} \begin{cases} -\sin(\mu_2 - mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p + q \\ \sin(\mu_2 + mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p \pm q \end{cases} \\ &+ \Delta G_{b, q} \begin{cases} \cos(\mu_2 - mN_p) \alpha, & \mu_1 = q - mN_p \\ \cos(\mu_2 + mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p - q \\ -\cos(\mu_2 + mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p + q \end{cases} \end{aligned} \right] \\
&- K 2\pi \Delta G_0 F_0 \sum_{\mu_2} \mu_2 D_a(\mu_1, \mu_2) \sin(\mu_2 \alpha), \quad \mu_1 = 0 \\
&- K \pi \Delta G_0 \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \alpha \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 D_a(\mu_1, \mu_2) \sin(\mu_2 + mN_p) \alpha, \quad \mu_1 = mN_p \\
&- K \pi F_0 \sum_{\mu_2} \mu_2 D_a(\mu_1, \mu_2) \left\{ \sum_{q=1} G_{a, q} \sin(\mu_2 \alpha) + \sum_{q=1} G_{b, q} \cos(\mu_2 \alpha) \right\}, \quad \mu_1 = q \\
&- \frac{\pi K}{2} \sum_{m=1}^{\infty} F_{a_m N_p} \sum_{\mu_2} D_a(\mu_1, \mu_2) \left\{ \begin{aligned} &\sum_{q=1} \Delta G_{a, q} \begin{cases} \sin(\mu_2 - mN_p) \alpha, & \mu_1 = -mN_p + q \\ -\sin(\mu_2 - mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p \pm q \end{cases} \\ &+ \sum_{q=1} \Delta G_{b, q} \begin{cases} \cos(\mu_2 - mN_p) \alpha, & \mu_1 = -mN_p + q \\ \cos(\mu_2 + mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p + q \\ -\cos(\mu_2 + mN_p) \alpha, & \mu_1 = mN_p - q \end{cases} \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
T_{RSTE}(\alpha) &= -K \int \Delta G^2 \frac{\partial F^2}{\partial \alpha} E^2 d\theta - K \int \Delta G^2 \Delta F^2 \frac{\partial E^2}{\partial \alpha} d\theta \\
&= -K \pi \Delta G_0 \sum_{r=1} \sum_{\mu_1, \mu_2} E_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \left\{ \begin{aligned} &-\Delta F_{a, r} \sin(r + \mu_2) \alpha \\ &+ \Delta F_{b, r} \cos(r + \mu_2) \alpha \end{aligned} \right\}, \quad \mu_1 = r \\
&- K \frac{\pi}{2} \left[\begin{aligned} &-\sum_{q, r} \sum_{\mu_1, \mu_2} r \Delta G_{a, q} \Delta F_{a, r} \begin{cases} \sin(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = -r + q \\ \sin(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r \pm q \end{cases} \\ &+ \sum_{q, r} \sum_{\mu_1, \mu_2} r \Delta G_{a, q} \Delta F_{b, r} \begin{cases} \cos(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = -r + q \\ \cos(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r \pm q \end{cases} \\ &-\sum_{q, r} \sum_{\mu_1, \mu_2} r \Delta G_{b, q} \Delta F_{a, r} \begin{cases} \cos(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = -r + q \\ \cos(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r - q \\ -\cos(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r + q \end{cases} \\ &+ \sum_{q, r} \sum_{\mu_1, \mu_2} r \Delta G_{b, q} \Delta F_{b, r} \begin{cases} -\sin(r - \mu_2) \alpha, & \mu_1 = -r + q \\ \sin(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r + q \\ -\sin(r + \mu_2) \alpha, & \mu_1 = r - q \end{cases} \end{aligned} \right] \\
&+ K \pi 2\Delta G_0 \Delta F_0 \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \sin(\mu_2 \alpha), \quad \mu_1 = 0 \\
&- K \pi \Delta G_0 \sum_{\mu_1, \mu_2} \sum_{r=1} \mu_2 E_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \left\{ -\Delta F_{a, r} \sin(r + \mu_2) \alpha + \Delta F_{b, r} \cos(r + \mu_2) \alpha \right\}, \quad \mu_1 = r \\
&- K \pi \Delta F_0 \sum_{q=1} \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_{\alpha}(\mu_1, \mu_2) \left\{ -\Delta G_{a, q} \sin(\mu_2 \alpha) + \Delta G_{b, q} \cos(\mu_2 \alpha) \right\}, \quad \mu_1 = q
\end{aligned}$$

Table II. All components of cogging torque considering uncertainties.

Symbol	Components	Configuration	Condition for θ integral to be non-zero	Order (k)
T_l	Ideal	$E_0 \sum G \sum F$	$nN_s = mN_p = z$ $z = LCM(N_p, N_s)$	$k = lz$ $(1z, 2s, 3s, \dots)$
T_{RT}	Rotor tolerance	$E_0 \sum G \sum \Delta F$	$r = nN_s$	$k = r = nN_s$
T_{ST}	Stator tolerance	$E_0 \sum \Delta G \sum F$	$q = mN_p$	$k = q = mN_p$
T_{RST}	Rotor & Stator tolerance	$E_0 \sum \Delta G \sum \Delta F$	$r = q$	$k = r = q$
T_{OE}	Only eccentricity	$\sum E \sum G \sum F$	$\begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_1 = mN_p - nN_s \end{cases}$	$k = \begin{cases} \mu_2 \\ mN_p \pm \mu_2 \end{cases}$
T_{RTE}	Rotor tolerance & Eccentricity	$\sum E \sum G \sum \Delta F$	$\begin{cases} r = nN_s \\ \mu_1 = r \\ \mu_1 = nN_s - r \\ \mu_1 = r \pm nN_s \end{cases}$	$k = \begin{cases} r = nN_s \\ \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ nN_s - (\mu_1 + \mu_2) \\ \mu_1 - \mu_2 + nN_s \end{cases}$
T_{STE}	Stator tolerance & Eccentricity	$\sum E \sum \Delta G \sum F$	$\begin{cases} q = mN_p \\ \mu_1 = mN_p \\ \mu_1 = q - mN_p \\ \mu_1 = mN_p \pm q \end{cases}$	$k = \begin{cases} q = mN_p \\ \mu_1 \\ \mu_2 \pm mN_p \end{cases}$
T_{RSTE}	All	$\sum E \sum \Delta G \sum \Delta F$	$\begin{cases} q = r \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_1 = r \text{ or } q \\ \mu_1 = r \pm q \\ \mu_1 = -r + q \end{cases}$	$k = \begin{cases} r = q \\ r \pm \mu_2 \\ \mu_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \frac{\pi}{2} \sum_{q,r} \Delta G_{a,q} \Delta F_{a,r} \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_a(\mu_1, \mu_2) \begin{cases} \sin(r - \mu_2)\alpha, \mu_1 = -r + q \\ -\sin(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r \pm q \end{cases} \\
 & + \frac{\pi}{2} \sum_{q,r} \Delta G_{a,q} \Delta F_{b,r} \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_a(\mu_1, \mu_2) \begin{cases} -\cos(r - \mu_2)\alpha, \mu_1 = -r + q \\ \cos(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r \pm q \end{cases} \\
 & -K \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{q,r} \Delta G_{b,q} \Delta F_{b,r} \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_a(\mu_1, \mu_2) \begin{cases} \cos(r - \mu_2)\alpha, \mu_1 = -r + q \\ -\cos(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r + q \\ \cos(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r - q \end{cases} \\
 & + \frac{\pi}{2} \sum_{q,r} \Delta G_{b,q} \Delta F_{b,r} \sum_{\mu_1, \mu_2} \mu_2 E_a(\mu_1, \mu_2) \begin{cases} \sin(r - \mu_2)\alpha, \mu_1 = -r + q \\ \sin(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r + q \\ -\sin(r + \mu_2)\alpha, \mu_1 = r - q \end{cases}
 \end{aligned} \right] \quad (48)
 \end{aligned}$$

Table II에 불확실성을 고려하여 코깅 토크의 구성 요소, 발생 조건 및 해당 고조파 차수를 나타내었다. 식(45)~(48)은 기존의 코깅 토크 유도 방식과 유사하며 계산 과정은 생략하였다. 다소 복잡한 Table II를 검증하기 위해 다음 장에서 48극 36슬롯의 Spoke-type PMSM의 코깅 토크 시험을 통해 검증한다.

V. PMSM 코깅 토크 측정 시험

이번 장에서는 실제 코깅 토크 측정값을 분석하여 발생하는 고조파 차수의 구성 요소를 분석한다. 수식적으로 도출된 코깅 토크와 비교하여 고조파 차수를 분류하고, 각 차수 발생에 기여하는 구성 요소를 식별한다. 마지막으로 코깅 토크 저감을 위한 주요 차수를 선정한다. Fig. 5는 48극 36슬롯의 Spoke-type PMSM 모터의 코깅 토크 측정 시험 사진을 나타낸다. 시험은 고정자 2대(S1, S2)와 회전자 2대(R1, R2)를 조합하여 4번 진행하여 불확실성 인자들의 영향을 확인하였다. 1 rpm의 회전 속도로 0.1°의 기계적 각도 간격으로 1회전 동안의 데이터를 측정하여 충분한 샘플링을 확보하였다. Fig. 6은 코깅 토크 측정 데이터와 4번의 시험에 대한 FFT 결과를 나타낸다. Fig. 6(a)에서 평균 토크는 마찰 및 히스테리시스 토크를 나타내고 평균 토크를 제외한 나머지 성분은

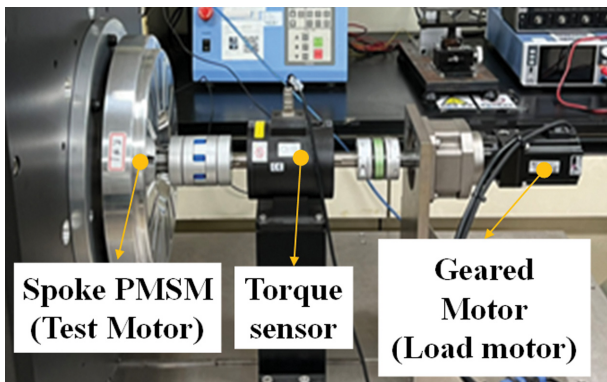


Fig. 5. (Color online) Cogging torque test setup.

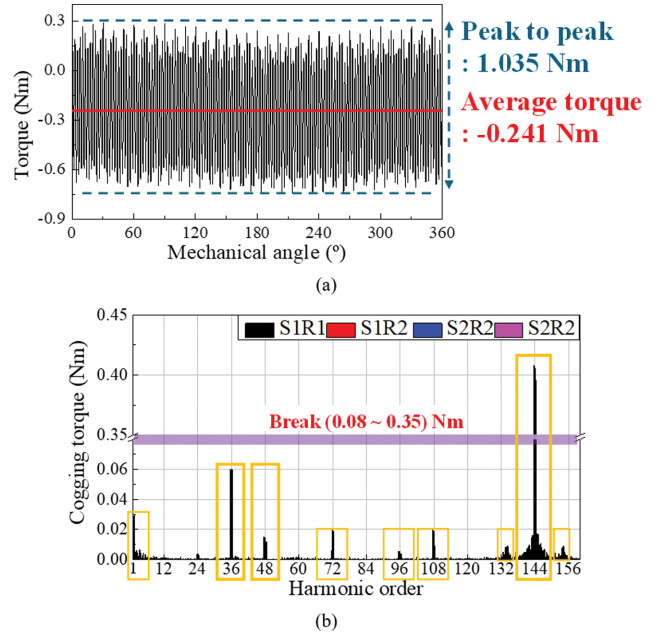


Fig. 6. (Color online) 48P36S Spoke type PMSM cogging torque measurement data (a) S1R1 cogging torque waveform data, (b) FFT result.

코깅 토크 성분이다. Fig. 6(b)에서 볼 수 있듯이, 코깅 토크에 상당한 영향을 미치는 주요 차수는 $LCM(N_B, N_S)$ 인 144차와 극 수의 배수 차수, 슬롯 수의 배수 차수 그리고 1차로 나타난다. Table III은 48극 36슬롯 PMSM의 성분 별 코깅 토크 발생 차수를 나타낸다. Fig. 6(b)와 Table III에서 알 수 있듯이 코깅 토크 기본과 성분으로 불리는 $LCM(N_B, N_S)$, 즉 144차는 이상적인 성분에 의해서만 발생하는 것이 아니라 모든 불확실성 성분이 중첩되어 나타날 수 있는 것을 알 수 있다. 또한 극 수 차수와 슬롯 수 차수는 불확실성 인자에 의한 코깅 토크의 다양한 성분들에 의한 중첩들로 발생할 수 있는 것을 알 수 있다. 따라서 이상적인 코깅 토크만을 저감하더라도 불확실성에 의해 기본과 차수는 줄어들지 않을 수 있다. 144차를 제외하고 36차 고조파의 영향이 지배적인 이유는 측정 대상 모터의 회전자가 분할 코어이기 때문에 회전자 쪽에서의 불확실성 인자 요소가 더 많고, 더 크게 심각한 공차를 발생시킬 가능성이 높아서, 결국 회전자 공차에 의한 영향으로 슬롯 수 차수가 크게 작용했기 때문이다. 144차에 인접한 차수도 발생하는 것으로 미루어 보아 편심에 의한 영향으로 보이나 극 수와 슬롯 수의 차이가 매우 크므로 영향은 미비한 것으로 보인다. 따라서 본 논문에서 불확실성을 고려한 코깅 토크를 줄이기 위한 주요 차수는 $LCM(N_B, N_S)$ 와 극 수 차수, 슬롯 수 차수이다. 만약 극 수와 슬롯 수의 차이가 작아서 편심의 영향이 더 커졌다면 모든 불확실성 인자의 영향이 복합적으로 작용해 1차와 같은 차수뿐만 아니라 극 수,

Table III. Cogging torque component occurrence order (48P36S PMSM).

Symbol	Torque order (k)	Order 48P36S Example
T_l	$k = lz$ ($1z, 2s, 3s, \dots$)	$k \in 144N$ {144, 288, ...}
T_{RT}	$k = r = nN_s$	$k \in 36N$ {36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, ...}
T_{ST}	$k = q = mN_p$	$k \in 48N$ {48, 96, 144, 192, 240, 288, ...}
T_{RST}	$k = r = q$	$k \in \{1, 2, 3, \dots, 12\} \cup 36N \cup 48N$ {1, 2, 3, ..., 12, 36, 48, 72, 96, 108, 144, ...}
T_{OE}	$k = \begin{cases} \mu_2 \\ mN_p \pm \mu_2 \end{cases}$	$k \in \{\mu_2\} \cup \{48N \pm \mu_2\}$ {1, 2, 3, ..., 12, 36, 37, ..., 48, 49, ..., 59, 60, ..., 132, 133, ..., 143, 144, 145, ..., 156, ...}
T_{RTE}	$k = \begin{cases} r = nN_s \\ \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ nN_s - (\mu_1 + \mu_2) \\ \mu_1 - \mu_2 + nN_s \end{cases}$	$k \in \{36N\} \cup \{\mu_2\} \cup \{\mu_1 + \mu_2\} \cup \{36N - (\mu_1 + \mu_2)\} \cup \{\mu_1 - \mu_2 + 36N\}$ {1, 2, 3, ..., 12, 36, 37, ..., 48, 49, ..., 59, 60, ..., 132, 133, ..., 143, 144, 145, ..., 156, ...}
T_{STE}	$k = \begin{cases} q = mN_p \\ \mu_2 \\ \mu_2 \pm mN_p \end{cases}$	$k \in \{48N\} \cup \{\mu_2\} \cup \{\mu_2 + 48N\}$ {1, 2, 3, ..., 12, ..., 48, 49, 50, ..., 60, 96, 97, 98, ..., 144, 145, 146, 156, ...}
T_{RSTE}	$k = \begin{cases} r = q \\ r \pm \mu_2 \\ \mu_2 \end{cases}$	$k \in \{1, 2, 3, \dots, 12\} \cup 36N \cup 48N \cup \{\mu_2\} \cup \{r \pm \mu_2\}$ {1, 2, 3, ..., 12, ..., 48, 49, 50, ..., 60, 96, 97, 98, ..., 144, 145, 146, 156, ...}

슬롯 수 차수에 영향 또한 증가하고 $\text{LCM}(N_B, N_S)$ 의 차수 및 그 주변 차수도 증가하여 복잡성이 증가하였을 것이다.

VI. 결 론

본 연구에서는 PMSM에서의 불확실성에 의한 코깅 토크에 미치는 영향을 분석하였다. 일반적으로 불확실성이 없는 경우를 가정하여, 불확실성 인자를 반영하지 않고 $\text{LCM}(N_B, N_S)$ 차수만을 고려하여 코깅 토크를 저감하였다. 그러나 본 연구 결과 $\text{LCM}(N_B, N_S)$ 차수는 모든 불확실성 인자들에 영향을 받을 수 있는 것으로 나타났다. 또한 불확실성 영향에 의해 극 수 차수, 슬롯 수 차수, 그리고 1차 수준의 낮은 차수도 발생할 수 있는 것으로 나타났다.

따라서 분할 코어 또는 전개형 코어와 같은 내재적 불확실성 인자에 영향을 많이 받을 수 있는 경우, 그리고 낮은 코깅 토크를 요구하는 PMSM 설계 시에는 반드시 불확실성을 염두하여 설계해야한다.

감사의 글

이 논문은 2026년 한화에어로스페이스 E-drive HUB 지원을 받아 수행된 연구임.

References

- [1] N. J. Baker, D. J. Smith, M. C. Kulan, and S. Turvey, IEEE Trans. Energy Convers. **33**, 40 (2018).
- [2] B.-K. Song, D.-K. Kim, S.-I. Kim, H.-J. Park, G.-H. Lee, and M.-S. Lim, IEEE Access **8**, 167930 (2020).
- [3] M. H. Sung, S.-H. Park, K.-S. Cha, J.-H. Sim, and M.-S. Lim, Machines **13**, 302 (2025).
- [4] S.-G. Lee, S. Kim, J.-C. Park, M.-R. Park, T. H. Lee, and M.-S. Lim, IEEE Trans. Energy Convers. **35**, 2076 (2020).
- [5] J. Ou, Y. Liu, R. Qu, and M. Doppelbauer, IEEE Trans. Ind. Electron. **65**, 3772 (2018).
- [6] Y. Zhao, S. Zhang, C. Zhang, G. Yang, and Y. Yang, IEEE Access **12**, 6672 (2024).